18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Bosnian* (*Serbian*)
Понедјељак, 23.јун, 2014.

1. Одреди све различите просте бројеве p, q и r такве да је

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Посматрајмо оштроугли троугао ABC чија је површина S. Нека је $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Означимо редом са H_1 и H_2 ортоцентре троуглова MNC и MND. Одредити површину четвероугла AH_1BH_2 у зависности од S.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Доказати да је

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Када вриједи једнакост?

4. За дати природан број n два играча A и B играју сљедећу игру: са гомиле од s каменчића играчи наизмјенично узимају каменчиће, при чему игру почиње играч A. При сваком узимању каменчића играчу је дозвољено да узме или један каменчић или прост број каменчића или позитиван број каменчића који је дјељив са n. Побједник је онај играч који узме посљедњи каменчић. Ако се претпостави да оба играча A и B играју савршено, за колико вриједности s играч A не може побиједити?

Вријеме: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем се бодује са 10 поена