18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Serbian*
Понедељак, 23. јун, 2014.

1. Одреди све различите просте бројеве p, q и r такве да је

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Посматрајмо оштроугли троугао ABC чија је површина S. Нека је $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Означимо редом са H_1 и H_2 ортоцентре троуглова MNC и MND. Одреди површину четвороугла AH_1BH_2 у зависности од S.

3. Нека су a, b, c позитивни реални бројеви такви да је $abc = 1$. Докажи да је

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

   Када важи једнакост?

4. За природан број n, два играча А и В играју следећу игру: са гомиле од s каменчића играчи наизменично узимају каменчиће, при чему игру почиње играч А. При сваком узимању каменчића играчу је дозвољено да узме или један каменчић или прост број каменчића или позитиван број каменчића који је дељив са n. Победник је онај играч који узме последњи каменчић. Ако претпоставимо да оба играча А и В играју савршено, за колико вредности s играч А не може да победи?

Време: 4 сата и 30 минута
Сваки проблем се бодује са 10 поена