



18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Russian*
Monday, June 23, 2014.

1. Найдите все различные простые числа p, q, r такие, что

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Пусть дан остроугольный треугольник ABC , площадь которого равна S . Пусть

$CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Обозначим H_1 и H_2 –

ортоцентры треугольников MNC и MND соответственно. Выразите площадь четырехугольника AH_1BH_2 через S .

3. Пусть даны положительные числа a, b, c такие, что $abc=1$. Докажите, что

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

Когда это неравенство обращается в равенство?

4. Для данного положительного числа n двое игроков A и B играют в следующую игру: дана куча из s камней. Игроки по очереди делают ход. Игру начинает A . Каждый игрок может взять один камень или такое количество камней, отличное от нуля, которое является либо простым числом, либо кратно числу n . Победителем считается тот, кто возьмет последний камень. Найдите количество значений s , для которых игрок A не сможет выиграть при правильной игре.

Time: 4 hours and 30 minutes
Each problem is worth 10 points