18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Romanian*
Luni, 23 iunie 2014

1. Determinaţi toate numerele prime distincte $p$, $q$ şi $r$ astfel încât

$$3p^4-5q^4-4r^2=26.$$

2. Se consideră un triunghi ascuţitunghic $ABC$ cu aria $S$. Fie $CD\perp AB$ ($D\in AB$), $DM\perp AC$ ($M\in AC$) şi $DN\perp BC$ ($N\in BC$). Se notează cu $H_1$ şi $H_2$ ortocentrele triunghiurilor $MNC$, respectiv $MND$. Determinaţi aria patrulaterului $AH_1BH_2$ în funcţie de $S$.

3. Fie numerele reale pozitive $a$, $b$, $c$ astfel încât $abc=1$. Arătaţi că:

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2\geq 3(a+b+c+1).$$

Când are loc egalitatea?

4. Se consideră un număr natural nenul $n$. Doi jucători A şi B joacă următorul joc: fiind dată o grămadă de $s$ pietre, jucătorii scot alternativ pietre din grămadă, A fiind cel care începe. Fiecare jucător poate scoate sau o piatră, sau un număr prim de pietre, sau un multiplu nenul de $n$ pietre. Câştigă cel care ia ultima piatră. Presupunând că A şi B folosesc fiecare cea mai bună strategie posibilă, pentru câte valori ale lui $s$ jucătorul A nu poate câştiga?

*Timp de lucru: 4 ore şi 30 de minute.*
*Fiecare problemă valorează 10 puncte.*