18th Junior Balkan Mathematical Olympiad

June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

زبان : فارسی　　　　　　　　مدت پاسخ گویی : چهارساعت و نیم

تاریخ آزمون : دوشنبه 23 جولای 2014　　　　　　　　امتیاز هر مسئله : 10

1- تمام اعداد اول متمایز p , q , r را طوری بیابید که در رابطه ی $3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$ صدق کنند.

2- فرض کنید در مثلث ABC تمام زاویه ها حاده بوده و مساحتش برابر با S باشد. می دانیم که $CD \perp AB$ $(D \in AB)$, و نیز این که $DM \perp AC$ $(M \in AC)$ و $DN \perp BC$ $(N \in BC)$. اگر محل همرسی (برخورد) ارتفاع های مثلث های MNC و MND را به ترتیب با H_1 و H_2 نشان دهیم ، مساحت چهارضلعی AH_1BH_2 را بر حسب S به دست آورید.

3- فرض کنید a , b , c اعدادی حقیقی و مثبت باشند. اگر $a\,b\,c = 1$ باشد ، ثابت کنید

$$(a + \frac{1}{b})^2 + (b + \frac{1}{c})^2 + (c + \frac{1}{a})^2 \geq 3\,(a + b + c + 1)$$

چه موقع این نامساوی به تساوی تبدیل می شود ؟

4- فرض کنیم n عددی طبیعی باشد. دو بازیکن A و B بازی زیر را انجام می دهند :

توده سنگی را که از s سنگریزه تشکیل شده است ، در نظر بگیرید. این بازی به صورت نوبتی انجام می شود و بازیکن A بازی را شروع می کند. هر بازیکن در نوبت خود مجاز است یک ، یا به تعداد عددی اول و یا مضربی طبیعی از n سنگریزه را بردارد. برنده کسی است که آخرین سنگریزه را بردارد. با فرض اینکه دو نفر بازی را تا آخر ادامه دهند ، تعیین کنید که به ازای چند مقدار مختلف s ، بازیکن A نمی تواند برنده شود؟