18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Macedonian*
Понеделник, 23 јуни 2014.

1. Најди ги сите различни прости броеви p, q и r такви што
$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Даден е остроаголниот триаголник ABC со плоштина S. Нека $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) и $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Да ги означиме со H_1 и H_2 ортоцентрите на триаголниците MNC и MND, соодветно. Најди ја плоштината на четириаголникот AH_1BH_2 во зависност од S.

3. Нека a, b, c се позитивни реални броеви такви што $abc = 1$. Докажи дека
$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2+\left(b+\frac{1}{c}\right)^2+\left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$
Кога важи равенство?

4. За природен број n, двајца играчи A и B ја играат следната игра: Со купче од s камчиња, играчите играат наизменично при што играчот A почнува прв. Во секој потег на играчот му е дозволено да земе или едно камче, или прост број камчиња, или позитивен број камчиња делив со n. Победник е оној кој ќе го земе последното камче. Ако претпоставиме дека и A и B играат совршено, за колку вредности на s играчот A не може да победи?

Време: 4 часа и 30 минути
Секоја задача носи 10 поени