



18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Montenegrin*
Ponedjeljak, 23.jun, 2014.

1. Odredi sve različite proste brojeve p , q i r takve da je

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Posmatrajmo oštrogli trougao ABC čija je površina S . Neka je $CD \perp AB$ ($D \in AB$),

$DM \perp AC$ ($M \in AC$) i $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Označimo redom sa H_1 i H_2 ortocentre

trouglova MNC i MND . Odredi površinu četvorougla AH_1BH_2 u zavisnosti od S .

3. Neka su a , b , c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je

$$\left(a + \frac{1}{b}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{c}\right)^2 + \left(c + \frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a + b + c + 1).$$

Kada važi jednakost?

4. Za dati prirodan broj n dva igrača A i B igraju sljedeću igru: sa gomile od s kamenčića igrači naizmjenično uzimaju kamenčiće, pri čemu igru počinje igrač A. Pri svakom uzimanju kamenčića igraču je dozvoljeno da uzme ili jedan kamenčić ili prost broj kamenčića ili pozitivan broj kamenčića koji je djeljiv sa n . Pobjednik je onaj igrač koji uzme posljednji kamenčić. Ako se pretpostavi da oba igrača A i B igraju savršeno, za koliko vrijednosti s igrač A ne može pobijediti?

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki zadatak se boduje sa 10 poena