18th Junior Balkan Mathematical Olympiad
June 21-26, 2014, Ohrid, Republic of Macedonia

Language: *Bosnian*
Ponedjeljak, 23.jun, 2014.

1. Odredi sve različite proste brojeve p, q i r takve da je

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

2. Posmatrajmo oštrougli trougao ABC čija je površina S. Neka je $CD \perp AB$ ($D \in AB$), $DM \perp AC$ ($M \in AC$) i $DN \perp BC$ ($N \in BC$). Označimo redom sa H_1 i H_2 ortocentre trouglova MNC i MND. Odredi površinu četverougla AH_1BH_2 u zavisnosti od S.

3. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi takvi da je $abc = 1$. Dokazati da je

$$\left(a+\frac{1}{b}\right)^2 + \left(b+\frac{1}{c}\right)^2 + \left(c+\frac{1}{a}\right)^2 \geq 3(a+b+c+1).$$

Kada vrijedi jednakost?

4. Za dati prirodan broj n dva igrača A i B igraju sljedeću igru: sa gomile od s kamenčića igrači naizmjenično uzimaju kamenčiće, pri čemu igru počinje igrač A. Pri svakom uzimanju kamenčića igraču je dozvoljeno da uzme ili jedan kamenčić ili prost broj kamenčića ili pozitivan broj kamenčića koji je djeljiv sa n. Pobjednik je onaj igrač koji uzme posljednji kamenčić. Ako se pretpostavi da oba igrača A i B igraju savršeno, za koliko vrijednosti s igrač A ne može pobijediti?

Vrijeme: 4 sata i 30 minuta
Svaki problem se boduje sa 10 poena